Generación de la Masa de las Partículas. II: Teorías de Aforo no Abelianas

Francisco R. Villatoro

November 1999

1. Introducción

Antes de estudiar la aplicación del mecanismo de generación de masas de Higgs a la teoría electrodébil completa, que es una teoría de aforo local no abeliana, vamos a estudiar su aplicación a una teoría de aforo global no abeliana más sencilla, el modelo de un triplete de bosones escalares con espín isotópico, isotriplete, con simetría $SO(3)$.

2. Grupo de rotaciones $SO(3)$

El grupo de rotaciones $SO(3)$ en $\mathbb{R}^3$ está formado por las transformaciones que preservan la distancia euclídea (isometrías)

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top R^\top R \mathbf{x} = \mathbf{x}'^\top \mathbf{x}',$$

cuya representación lineal corresponde a las matrices R ortogonales tales que su inversa es igual a su traspuesta $R^{-1} = R^\top$.

Como ejemplos de rotaciones vamos a escribir las matrices de rotación respecto de los ejes del sistema de coordenadas. La rotación respecto al eje z es $R_z(\theta)$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= R_z(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Similarmente, las matrices de rotación en los ejes x e y son

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

$$R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 10 & \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

El grupo de rotaciones $SO(3)$ es un grupo continuo o de Lie no abeliano, ya que el producto de matrices no es conmutativo, con 3 parámetros libres (las matrices tienen 9 elementos pero la condición $R^\top R$ impone 6 ecuaciones). Como parámetros se pueden tomar, por ejemplo, los ángulos de Euler θ, ϕ y ψ. Para cada uno de los parámetros podemos definir un generador del grupo de Lie, es decir, matrices que realizan la transformación infinitesimal. En nuestro caso, obtenemos como generadores

$$J_z = -\mathrm{i}\, \frac{dR_z(\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_x = -\mathrm{i}\, \frac{dR_x(\phi)}{d\phi}\bigg|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_y = -\mathrm{i}\, \frac{dR_y(\psi)}{d\psi}\bigg|_{\psi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de los generadores son hermitianas y representan rotaciones infinitesimales

$$R_z(\delta\theta) = 1 + \mathrm{i} J_z \delta\theta, \qquad R_z(\delta\phi) = 1 + \mathrm{i} J_x \delta\phi.$$

Las matrices de rotaciones se pueden obtener exponenciando los generadores, por ejemplo, para $\theta = n\delta\theta$,

$$R_z(\theta) = (R_z(\delta\theta))^n = (1 + \mathrm{i} J_z \frac{\theta}{n})^n = e^{\mathrm{i} J_z \theta}.$$

En general una rotación un ángulo θ respecto a un eje de vector director $\hat{\mathbf{n}}$ (unitario) se escribe como

$$R_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) = e^{\mathrm{i} J\cdot\theta} = e^{\mathrm{i} J\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta}, \qquad \theta = \hat{\mathbf{n}}\theta.$$

El conmutador para estas matrices tiene la forma

$$[J_x, J_y] = J_x J_y - J_y J_x = \mathrm{i} J_z,$$

y permutaciones cíclicas, como es fácil comprobar.

3. Bosones de Goldstone

Consideremos tres campos escalares reales ϕ_i ($i = 1, 2, 3$), y por tanto neutros, que forman un triplete de partículas o isovector. Este campo tiene como Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\delta_\mu \phi_i)(\delta^\mu \phi_i) - \frac{m^2}{2}\phi_i\phi_i - \lambda(\phi_i\phi_i)^2.$$

Esta Lagrangiana es invariante respecto a rotaciones de isospín $SO(3)$ de la forma

$$\begin{aligned} G : \phi_i \to e^{\mathrm{i}Q_k\alpha_k}\phi_i e^{-\mathrm{i}Q_k\alpha_k} &= \left(e^{-\mathrm{i}T_k\alpha_k}\right)_{ij}\phi_j \\ &= U_{ij}\phi_j = (U(g)\phi)_i\,, \end{aligned}$$

donde α_i son los ángulos de rotación en el espacio de isospín, Q_i son los generadores del grupo $SO(3)$, T_i con las matrices de los generadores de dicho grupo en la representación tridimensional y U_{ij} son las matrices de la representación unitaria del grupo.

El vacío para esta teoría corresponde a un mínimo del potencial de interacción

$$V(\phi_i) = \frac{m^2}{2}\phi_i\phi_i + \lambda(\phi_i\phi_i)^2,$$

que para $m^2 > 0$ corresponde a $\phi_i = 0$, pero para $m^2 < 0$ se obtiene el conjunto degenerado de vacíos posibles

$$|\phi_0| = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)^{1/2} = \sqrt{-\frac{m^2}{4\lambda}} = a.$$

Este vacío está degenerado a una esfera en el espacio de espín isotópico. Estos vacíos no son invariantes respecto al grupo de simetría $G = SO(3)$. Cualquier selección del vacío, por ejemplo, $\phi_0 = (0, 0, a)$ rompe la invarianza de las ecuaciones originales. Sin embargo, este vacío es invariante ante un subgrupo de las rotaciones

$$H = \{g \ : \ g \in G, \ \phi_0' = U(g)\phi_0 = \phi_0\},$$

las rotaciones alrededor del eje z del espacio de espín isotópico,

$$H : \quad U(h) = e^{\mathrm{i}T_3\alpha_3}.$$

Se ha producido una ruptura espontánea de la simetría. ¿Cuántos bosones de Goldstone obtendremos en este caso? Tomemos como campos físicos (ϕ_1, ϕ_2, χ), donde $\phi_3 = a + \chi$, entonces el potencial se puede escribir

$$\begin{aligned} V &= \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + (a+\chi)^2) \\ &\quad + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2 + (a+\chi)^2)^2 \\ &= -2\lambda a(\zeta^2 + 2\chi a + a^2) + \lambda(\zeta^2 + 2\chi a + a^2)^2 \\ &= 4\lambda\chi^2 a^2 + 4a\lambda\chi\zeta^2 \\ &= \lambda((\phi_i\phi_i - a^2)^2 - a^4), \end{aligned}$$

donde $\zeta^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \chi^2$.

De esta forma observamos que el campo χ a adquirido masa mientras que los campos ϕ_1 y ϕ_2 corresponden a dos bosones de Goldstone y no tienen masa

$$m_\chi^2 = 8a^2\lambda, \qquad m_{\phi_1} = m_{\phi_2} = 0.$$

El número de bosones de Goldstone corresponde a la dimensión del subgrupo cociente G/H.

4. Bosones de Higgs

El mecanismo de Higgs se puede aplicar al isotriplete estudiado en el apartado anterior si éste se acopla con un campo electromagnético, con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi_i)(D^\mu\phi_i) - \frac{m^2}{2}\phi_i\phi_i - \lambda(\phi_i\phi_i)^2 - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu},$$

donde la derivada covariante y el campo electromagnético se definen

$$D_\mu\phi_i = \partial_\mu\phi_i + g\epsilon_{ijk}A^j_\mu\phi_k,$$

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\epsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu, \phi_k.$$

Para $m^2 < 0$ tenemos una ruptura espontánea de la simetría y podemos elegir como vacío $\phi_0 = (0, 0, a + \chi)$.

Obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2 + (\partial_\mu\chi)^2\right) \\ &\quad + ag\left((\partial_\mu\phi_1)A_2^\mu - (\partial_\mu\phi_2)A_1^\mu\right) \\ &\quad + \frac{a^2g^2}{2}\left((A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}(\delta_\mu A^i_\nu - \delta_\nu A^i_\mu)^2 \\ &\quad - 4a^2\lambda\chi^2 + \text{términos cúbicos} \\ &\quad + \text{cuárticos}, \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(\delta_\mu A^i_\nu - \delta_\nu A^i_\mu)^2 \\ &\quad - \frac{a^2g^2}{2}\left((A^1_\mu)^2 + (A^2_\mu)^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\delta_\mu\chi)^2 - 4a^2\lambda\chi^2 \\ &\quad + \text{términos cúbicos} + \text{cuárticos}, \end{aligned}$$

que representa un campo escalar masivo, dos campos vectoriales masivos y un campo vectorial sin masa, es decir, los bosones escalares de Goldstone han desaparecido.

Recapitulando, teníamos 3 bosones escalares con masa y 3 campos vectoriales sin masa, tras la ruptura espontánea de la simetría hemos obtenido, un bosón escalar con masa (el bosón de Higgs), dos bosones vectoriales con masa y uno sin masa. El número de partículas con masa corresponde a la dimensión del grupo G, el número de bosones vectoriales con masa a la dimensión de G/H y el número de bosones vectoriales sin masa a la dimensión de H. El número de grados libertad se conserva en el proceso, inicialmente teníamos $3 + 3 \times 2$ (los bosones vectoriales sin masa son transversales) y el final hemos obtenido $1 + 2 \times 3 + 2$ (los bosones vectoriales con masa tienen tres grados de libertad).

Referencias

[1] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory (2nd. ed.)*, Cambridge University Press (1996).

[2] A.A. Sokolov, I.M. Ternov, V. Ch. Zhukovski y A.V. Borisov, *Electrodinámica Cuántica*, Editorial Mir, Moscú (1989).