Generación de la Masa de las Partículas. I: Bosones Escalares de Goldstone y Higgs

Francisco R. Villatoro

1 Introducción

El premio Nobel de Física de 1999 ha sido concedido a los físicos holandeses Gerard 't Hooft y Martinus Veltman por sus contribuciones a la renormalización de la teoría electrodébil y, con ella, de todo el Modelo Estándar de las partículas elementales. En el Modelo Estándar las masas de las partículas elementales se generan mediante una ruptura espontánea de la simetría.

La ruptura espontánea de la simetría fue descubierta por Heisenberg en 1932 en su estudio de los materiales ferromagnéticos, y aplicada por Nambu y Goldstone, en 1960, a teorías de campos en física de la materia condensada (teorías de aforo (*gauge*) global) [1, 2, 3]. En 1963, Higgs la aplicó a teorías de aforo local descubriendo un mecanismo para la generación de la masa de las partículas elementales. Dicho mecanismo está en la base de la teoría electrodébil, desarrollada por Glashow, Weinberg y Salam, premios Nobel de Física en 1979. La teoría electrodébil es una teoría de aforo local $SU(2) \times U(1)$ que unifica la fuerza electromagnética mediada por el fotón, que no tiene masa, y la fuerza débil mediada por los bosones vectoriales intermedios $\mathrm{W}^{\pm}$ y Z, que tienen masa no nula. En esta teoría, se produce una ruptura espontánea de la simetría mediante el mecanismo de Higgs, por el cual los bosones vectoriales adquieren masa y queda como remanente una partícula masiva, el bosón escalar de Higgs, todavía no encontrado experimentalmente [1, 2, 3].

't Hooft probó en su tesis doctoral, dirigida por Veltman, que una teoría de aforo local con ruptura espontánea de la simetría, como la teoría electrodébil, es renormalizable. De esta forma se definió un procedimiento consistente para realizar cálculos de gran precisión en esta teoría y, entre ellos, la predicción de las masas de las partículas $\mathrm{W}^{\pm}$ y Z, descubiertas en el CERN en 1983, y del quark t (top), descubierto en el Fermilab en 1996.

En este artículo se estudiará la generación de masa mediante ruptura espontánea de la simetría. Primero, repasaremos brevemente la notación tensorial (de índices) para vectores y covectores, la relatividad especial, la diferencia entre vectores axiales y polares, y la formulación covariante o relativista de las ecuaciones de Maxwell. Seguidamente, repasaremos la formulación lagrangiana de campos clásicos y su aplicación a un campo escalar cargado (complejo) que tiene simetría de aforo global de tipo $U(1)$. Imponiendo la invarianza de las ecuaciones de este campo ante transformaciones de aforo locales se obtiene un campo electromagnético. Finalmente, estudiaremos la aplicación de la ruptura de simetría al campo escalar cargado con simetría de aforo global, el mecanismo de Goldstone, y con simetría de aforo local, el mecanismo de Higgs, que permite al campo electromagnético adquirir masa "tragándose" una de las componentes del campo escalar y dejando como remanente a la otra, el bosón de Higgs.

2 Vectores y covectores

Sea un vector $\mathbf{x}$ en el espacio vectorial $V \equiv \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z),$$

y $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{3}$ una base de dicho espacio, entonces se puede expresar $\mathbf{x}$ en coordenadas como [4]

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x^i\mathbf{e}_i \equiv x^i\mathbf{e}_i,$$

donde, para la última expresión, hemos usado el convenio de suma de índices de Einstein, según el cual términos (productos) con índices repetidos representan la suma de dichos términos respecto a dichos índices.

Se denomina espacio vectorial dual V' al espacio de formas lineales (covectores) en V. Un covector $\mathbf{a} \in V'$ es una función $\mathbf{a} : V \to \mathbb{R}$, lineal

$$\mathbf{a}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{a}(\mathbf{y}).$$

En función de las coordenadas de $\mathbf{x}$ [4],

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = a_i x^i \equiv a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3,$$

donde $a_i = \mathbf{a}(\mathbf{e}_i)$. Definiendo los covectores $\mathbf{e}^j$

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) = g_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

donde δ_i^j es la delta de Krocneker, obtenemos $\mathbf{e}^j(\mathbf{x}) = x^j$ y se comprueba que forman una base de V', que permite escribir $\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}^j$, ya que

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_j \mathbf{e}^j)(\mathbf{x}) = a_j \mathbf{e}^j(\mathbf{x}) = a_j x^j \equiv a_i x^i,$$

(donde hemos usado que los índices son mudos). La dimensión de V es igual a la dimensión de V' y, por tanto, son espacios vectoriales isomorfos, luego podemos considerar un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tanto como vector x^i o como covector x_i. A los vectores y covectores también se les denomina vectores contravariantes x^i y covariantes x_i, respectivamente. Para subir y bajar índices se usa el tensor fundamental $g_i^j = g_{ij} = g^{ij}$,

$$x^i g_i^j = x^j, \qquad x^i g_{ij} = x_j, \qquad x_i g^{ij} = x^j.$$

El espacio-tiempo euclídeo $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ es el espacio invariante ante transformaciones de Galileo, que son las que dejan invariante el tiempo y la distancia euclídea en el espacio, definida mediante el producto escalar euclídeo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V' \to \mathbb{R}, \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{x}) = a_i x^i.$$

Como V y V' son isomorfos, se puede definir el producto escalar como un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Para distancias infinitesimales obtenemos la condición

$$ds^2 = dx_i dx^i = g_{ij} dx^j dx^i.$$

3 Relatividad especial

La relatividad especial se basa en el principio de constancia de la velocidad de la luz (c) y usa el espacio-tiempo de Minkowski que es invariante ante trasformaciones de Lorentz, que son las que preservan la métrica pseudo-euclídea [5, 6]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Al contrario que en el espacio-tiempo euclídeo, los vectores contravariantes y los covariantes en el espacio de Minkowski son diferentes,

$$x = x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x, y, z),$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\mathbf{x}) = (ct, -x, -y, -z),$$

respectivamente. Introduciendo el tensor métrico fundamental

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu},$$

podemos escribir la métrica como

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu.$$

Se definen los operadores diferenciales [5, 6]

$$\begin{aligned} \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \\ &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \end{aligned}$$

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),$$

que conducen al operador de segundo orden

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

de d'Alembert, que es invariante Lorentz.

4 Vectores polares y axiales

Un vector (o un campo vectorial) $\mathbf{a}(x, y, z)$ se denomina axial (pseudovector) o polar (vector) en función de si cambia o no, respectivamente, de signo cuando se realiza una reflexión espacial, $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$. La importancia de esta diferencia se debe a que el producto vectorial de dos vectores polares $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector axial [1, 6].

Introduciendo el tensor completamente anti-simétrico de rango 3 de Levi-Civita ε_{ijk} definido como

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1,$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0, \quad \text{en otro caso},$$

se escribe el producto vectorial $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en componentes $c_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l$ (recuerde sumar respecto a índices repetidos, en este caso, $\sum_{kl}$).

Asociado al producto vectorial podemos escribir un tensor anti-simétrico de rango 2 de la forma

$$c_{ik} = a_i b_k - a_k b_i = -c_{ki}$$

que permite escribir (sume índices repetidos)

$$c_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} c_{kl} = \varepsilon_{ikl} a_k b_l, \qquad c_{ik} = \varepsilon_{ikl} c_l.$$

Así, para el rotacional $\mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{c}$ tenemos

$$R_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_l} - \frac{\partial c_l}{\partial x_k} \right), \qquad R_{ik} = \varepsilon_{ikl} R_l.$$

En general, todos los vectores axiales $\mathbf{c}$ se pueden representar como tensores anti-simétricos de rango 2 de la forma $c_{ik} = \varepsilon_{ikl} c_l$.

5 Formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético (con unidades en el sistema gaussiano) toman la forma [1, 2, 3, 5, 6]

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (5.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0, \qquad (5.3)$$

donde $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ρ, $\mathbf{j}$ y c son el campo eléctrico, la intensidad de campo magnético, la densidad de carga, la corriente de carga y la velocidad de la luz, respectivamente. Las ecuaciones (5.1) corresponden a la Ley de Faraday, un campo magnético variable genera un campo eléctrico, y a la ausencia de cargas magnéticas (monopolos). Las ecuaciones (5.2) corresponden a la Ley de Ampère con el término añadido por Maxwell que permite la generación de ondas electromagnéticas, y a la ley de Gauss, la carga total en un volumen determina el campo en su superficie. Finalmente, la ecuación (5.3) es la ley de conservación de la carga.

Las ecuaciones (5.1) quedan automáticamente satisfechas si se introducen dos potenciales, uno escalar o eléctrico, ϕ, y otro vectorial o magnético, $\mathbf{A}$, de forma que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi,$$

(ya que $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} = 0$ y $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \nabla\times\nabla\phi = 0$).

En relatividad especial podemos definir un cuadrivector potencial $A_\mu = (\phi, \mathbf{A}) = (A_0, A_i)$ y los campos eléctrico y magnético se escriben

$$E_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \nabla\phi = -\partial_0 A_i - \partial_i A_0,$$

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left(\partial_j A_k - \partial_k A_j\right).$$

Definiendo el tensor covariante antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

obtenemos que, de lo dicho anteriormente [5, 6],

$$F_{i0} = E_i, \qquad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k,$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiendo un cuadritensor completamente antisimétrico de cuarto rango $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (igual a 1 para permutaciones pares de $\mu\nu\rho\sigma = 0123$, a -1 para permutaciones impares y a cero en otro caso), las ecuaciones (5.1) se pueden escribir como

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma},$$

donde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ es el tensor dual de $F_{\mu\nu}$ [1, 6].

Introduciendo un cuadrivector corriente $J_\mu = (\rho, \mathbf{j}/c) = (\rho, j_i/c)$, podemos escribir las ecuaciones (5.2) como

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi J_\nu.$$

Además, se cumple automáticamente la ecuación de continuidad $\partial^\mu J_\mu = 0$, ya que

$$\begin{aligned} \partial^\mu\partial^\nu F_{\mu\nu} &= \partial^\mu\partial^\nu\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \\ &= \partial^2\left(\partial^\nu A_\nu - \partial^\mu A_\mu\right) = 0. \end{aligned}$$

A partir del tensor del campo $F_{\mu\nu}$ podemos definir dos invariantes [1, 2]

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \text{inv.},$$

$$\varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = \text{inv.},$$

que indican que la energía se conserva y el campo electromagnético es transversal, respectivamente.

El campo electromagnético es invariante ante transformaciones de aforo (*gauge*) de tipo $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu f$, donde f es una función escalar arbitraria, ya que $F_{\mu\nu}$ (los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$) no cambian ante dicha transformación.

6 Teoría clásica de campos

En teoría de campos relativistas se especifican las ecuaciones para los campos $\phi_i(x)$, mediante un principio de mínima acción: la acción [1, 2, 3, 6]

$$S = \int \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\, d^4x,$$

donde $\mathcal{L}$ es la densidad lagrangiana, debe ser estacionaria $\delta S = 0$. Operando

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right] d^4x,$$

e integrando por partes usando $\delta(\partial_\mu\phi_i) = \partial_\mu(\delta\phi_i)$ y que $\delta\phi_i = 0$ en el contorno, obtenemos

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right)\right]\delta\phi_i\, d^4x = 0,$$

que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\right) = 0, \qquad (6.1)$$

para cada campo ϕ_i.

7 Campo escalar ϕ^4 complejo

Consideremos un campo escalar complejo con una auto-interacción no lineal cuártica [1, 2, 3],

$$\mathcal{L} = g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi^*) - V(\phi^*\phi),$$

$$V(\phi^*\phi) = m^2\,\phi^*\phi + \frac{\lambda}{2}\,(\phi^*\phi)^2,$$

donde $\phi = \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2$ y $\phi^* = \phi_1 - \mathrm{i}\phi_2$ se pueden considerar como dos campos independientes. El parámetro m, en la versión cuántica de este campo, se convertirá en la masa de las partículas. El parámetro λ representa la constante de auto-interacción de las partículas consigo mismas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.1) dan

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{\partial V}{\partial\phi} = -\phi^*\,\frac{\partial V}{\partial(\phi^*\phi)}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\phi\,\frac{\partial V}{\partial(\phi^*\phi)},$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = g^{\mu\nu}(\partial_\nu\phi^*) = \partial^\mu\phi^*, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)} = \partial^\mu\phi,$$

y como $\partial V/\partial(\phi^*\phi) = m^2 + \lambda(\phi^*\phi)$, obtenemos

$$(\Box + m^2 + \lambda\,\phi^*\phi)\phi = 0, \quad (\Box + m^2 + \lambda\,\phi^*\phi)\phi^* = 0,$$

para las ecuaciones de este campo relativista. En la versión cuántica de esta teoría estas ecuaciones representan una partícula (ϕ) y su antipartícula (ϕ^*) de espín 0 (bosón escalar) de masa m.

Tanto la lagrangiana $\mathcal{L}$ como las ecuaciones de campo son invariantes ante transformaciones de aforo globales,

$$\phi \longrightarrow e^{\mathrm{i}\Lambda}\,\phi, \qquad (\Lambda\ \text{constante}),$$

es decir, transformaciones de fase o de tipo $U(1)$. La invarianza $U(1)$ conduce a la conservación de la carga eléctrica. Calculando la 4-divergencia de la densidad de corriente

$$J^\mu = \mathrm{i}(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*),$$

obtenemos aplicando las ecuaciones del campo

$$\partial_\mu J^\mu = \mathrm{i}(\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + \phi^*\Box\phi - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - \phi\Box\phi^*) = 0,$$

con lo que la carga eléctrica

$$Q = \int J^0\,d^3x = \frac{\mathrm{i}}{c}\int\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)\,d^3x,$$

se conserva $dQ/dt = 0$. Es necesario recurrir a la versión cuántica de la teoría [1, 2, 3] para que en la definición de Q aparezcan e, la carga del electrón, y $\hbar$, la constante de Planck, así como para obtener que la carga eléctrica está cuantizada $Q = n\,e$. Nótese que un campo escalar real ($\phi = \phi^*$) representa partículas neutras $Q = 0$.

8 Teoría de aforo local del campo escalar ϕ^4 complejo

La invarianza $U(1)$ global del campo escalar complejo indica que podemos seleccionar la fase del campo arbitrariamente, pero si cambiamos la fase en un punto del espacio debemos hacerlo simultáneamente en todos los puntos. Sin embargo, esto es incompatible con la relatividad especial, ya que implica que una señal (el cambio de fase en un punto) ha de propagarse a una velocidad infinita. Para restaurar la causalidad física debemos considerar cambios de fase locales, es decir, la teoría con invarianza de aforo $U(1)$ local [1, 3],

$$\phi \longrightarrow e^{-\mathrm{i}\Lambda(x)}\,\phi, \qquad \Lambda(x) = \Lambda(x^\mu).$$

Considerando un cambio infinitesimal $\Lambda \ll 1$,

$$\phi \to \phi + \delta\phi = \phi - \mathrm{i}\Lambda\phi, \qquad \delta\phi = -\mathrm{i}\Lambda\phi,$$

$$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi - \mathrm{i}(\partial_\mu\Lambda)\phi - \mathrm{i}\Lambda(\partial_\mu\phi)),$$

con lo que $\delta(\partial_\mu\phi) \neq -\mathrm{i}\Lambda(\partial_\mu\phi)$ y $\partial_\mu\phi$ no se transforma covariantemente, es decir, como lo hace ϕ. Por ello, la lagrangiana tampoco es invariante

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \delta((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*)) - \delta V(\phi^*\phi) \\
&= (-\mathrm{i}\Lambda(\partial_\mu\phi) - \mathrm{i}(\partial_\mu\Lambda)\phi)\,(\partial^\mu\phi^*) \\
&\quad + (\partial_\mu\phi)\,(\mathrm{i}\Lambda(\partial^\mu\phi^*) + \mathrm{i}(\partial^\mu\Lambda)\phi^*) \\
&= \partial_\mu\Lambda(-\mathrm{i}\phi\partial^\mu\phi^* + \mathrm{i}\phi^*\partial^\mu\phi) = (\partial_\mu\Lambda)J^\mu,
\end{aligned}$$

ya que $\delta(\phi^*\phi) = 0$.

Para restaurar la invarianza de aforo hay que introducir un campo vectorial A_μ (con las mismas unidades que ∂_μ) acoplado a la corriente J^μ, y que se transforme adecuadamente. Debemos añadir

$$\mathcal{L}_1 = -e\,J^\mu A_\mu, \qquad \text{tal que } A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda,$$

con lo que obtenemos el término requerido

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_1 &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu) \\
&= -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu(\partial_\mu\Lambda),
\end{aligned}$$

pero a costa de introducir un nuevo término a cancelar

$$\begin{aligned}
-eA_\mu(\delta J^\mu) &= -e\mathrm{i}A_\mu\,\delta(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \\
&= -2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi,
\end{aligned}$$

lo que nos obliga a introducir otro término

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu\phi^*\phi,$$

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e^2 A_\mu\delta(A^\mu)\phi^*\phi = 2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi.$$

De esta forma $\mathcal{L}+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$ es invariante ante transformaciones $U(1)$ locales.

El campo vectorial A_μ también puede interactuar consigo mismo de forma invariante. Definiendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{e}\partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda = 0,$$

podemos añadir a la lagrangiana

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

y obtener como lagrangiana total

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T &= (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - \mathrm{i}e(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)A_\mu \\ &\quad + e^2 A_\mu A^\mu \phi^*\phi - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= (D_\mu\phi)(D^\mu\phi^*) - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},\end{aligned}$$

donde hemos introducido la derivada covariante

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\phi, \qquad D^\mu\phi^* = (\partial^\mu - \mathrm{i}eA^\mu)\phi^*$$

que se transforma como ϕ,

$$\delta(D_\mu\phi) = \delta(\partial_\mu\phi) + \mathrm{i}e(\delta A_\mu)\phi + \mathrm{i}eA_\mu\delta\phi = -\mathrm{i}\Lambda\delta(D_\mu\phi).$$

En la lagrangiana total $\mathcal{L}_T$, ha sido necesario introducir de forma natural un campo electromagnético con objeto de garantizar la invarianza $U(1)$ local de la lagrangiana original.

Las ecuaciones de Maxwell (5.1) se satisfacen automáticamente para $F_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo A_μ

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right) = 0,$$

conducen a las ecuaciones (5.2)

$$\begin{aligned}\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -\mathrm{i}e(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) + 2e^2A^\mu\phi^*\phi \\ &= -\mathrm{i}e(\phi^*D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*) = -e\mathrm{J}^\mu,\end{aligned}$$

utilizando como corriente la versión covariante

$$\mathrm{J}^\mu = \mathrm{i}(\phi^*D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*),$$

que también se conserva $\partial_\mu \mathrm{J}^\mu = 0$.

Es importante notar que el campo electromagnético no tiene masa ($m_A = 0$), ya que el término de masa

$$\mathcal{L}_M = m_A^2 A_\mu A^\mu,$$

no es invariante ante transformaciones $U(1)$. Por ello, los partículas del campo electromagnético, los fotones, han de viajar a la velocidad de la luz.

Finalmente, debemos notar que e, la constante de acoplamiento entre el campo electromagnético A_μ y el campo escalar ϕ, juega un papel doble. Por un lado, es la carga eléctrica, una cantidad que se conserva $e = \int \mathrm{J}^0\, dV$, y por otro lado, mide la fuerza con la que la partícula ϕ interactúa con el campo electromagnético A_μ [1].

9 Ruptura espontánea de la simetría

La ruptura espontánea de la simetría la descubrió Heisenberg trabajando con materiales ferromagnéticos, imanes naturales [1, 2, 3]. A baja temperatura, todos los espines, pequeños dipolos magnéticos asociados a los núcleos de los átomos del material, están alineados en una determinada dirección, la de norte-sur del imán, y el material no es simétrico cuando lo rotamos (de ahí que las brújulas siempre apunten al norte aunque las giremos). A alta temperatura, la magnetización desaparece, los espines se alinean en direcciones aleatorias y el material se vuelve simétrico, no cambia cuando lo rotamos. Existe una temperatura crítica T_{crit} a la que se produce la ruptura espontánea de la simetría. El estado físico, o de mínima energía, para $T > T_{\text{crit}}$ es simétrico, pero para $T < T_{\text{crit}}$ es asimétrico y está infinitamente degenerado ya que la dirección en la que se alinean los espines se elige prácticamente al azar, si se repite el experimento de calentar y enfriar muchas veces en todas las ocasiones se obtienen direcciones norte-sur completamente distintas.

10 Bosón de Goldstone

Estudiaremos ahora, la aplicación de la ruptura espontánea de la simetría al campo escalar ϕ^4 complejo presentado en la sección 7. El estado de mínima energía para este campo se determina minimizando el potencial V [1, 2, 3],

$$\frac{\partial V}{\partial\phi} = \phi^*\,\frac{\partial V}{\partial(\phi^*\phi)} = m^2\phi^* + \lambda\phi^*(\phi^*\phi) = 0.$$

Cuando $m^2 > 0$, V tiene un mínimo para $\phi^* = \phi = 0$. Pero para $m^2 < 0$ tiene un máximo local en $\phi = 0$ e infinitos mínimos para

$$\phi^*\phi = |\phi|^2 = -\frac{m^2}{\lambda} = a^2. \qquad (10.1)$$

Todos los mínimos se encuentra en $|\phi| = a$, un círculo en el plano (ϕ_1, ϕ_2), donde $\phi = \phi_1 + \mathrm{i}\phi_2$ como se muestra en la Figura 1.

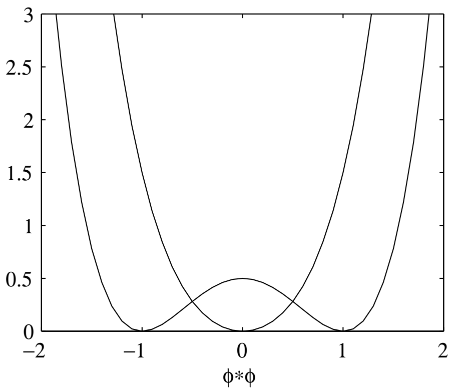

Figura 1: Potencial $V(|\phi|^2)$ para $m^2 = 1$ (curva interior, V) y $m^2 = -1$ (curva exterior, $V + 1/2$).

En una teoría cuántica, ϕ es un operador y la condición de mínima energía determina el valor esperado del campo en el vacío, es decir, cuando no hay ninguna partícula

$$|\langle 0|\phi|0\rangle|^2 = a^2.$$

Los estados con una, dos o n partículas se obtienen añadiendo estas partículas una a una al vacío, que puede no coincidir con $\phi = 0$. Tomando coordenadas polares,

$$\phi(x) = (a + \rho(x))\, e^{\mathrm{i}\theta(x)}, \tag{10.2}$$

obtenemos para el estado del vacío

$$|\langle 0|\phi|0\rangle| = a, \qquad |\langle 0|\rho|0\rangle| = 0, \qquad |\langle 0|\theta|0\rangle| = 0.$$

Este campo tiene las mismas características que el ejemplo del ferromagnetismo: tenemos infinitos estados de vacío degenerados que están conectados por la simetría de la teoría, cambiar la fase, de tal forma que la elección de un vacío concreto (como la dirección de magnetización) rompe la simetría, fija una fase dada.

Podemos considerar a ρ y ϕ como los campos físicos, con los que expresaremos el lagrangiano $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - V$. Operando

$$\begin{aligned} V(\phi^*\phi) = V(a+\rho) &= m^2(a+\rho)^2 + \frac{\lambda}{2}(a+\rho)^4 \\ &= \lambda a^2(a+\rho)^2 + \frac{\lambda}{2}(a+\rho)^4 \\ &= \frac{\lambda}{2}\rho^4 + 2a\lambda\rho^3 + 2\lambda a^2\rho^2 - \frac{\lambda}{2}a^4 \end{aligned}$$

donde se ha usado la ec. (10.1), y para el otro término

$$(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) = (\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) + (a+\rho)^2(\partial_\mu\theta)(\partial^\mu\theta).$$

El Lagrangiano tiene un término en ρ^2, por lo que el campo ρ tiene una masa dada por

$$m_\rho^2 = 2\lambda a^2,$$

mientras que la ausencia de término en θ^2 indica que θ es un campo sin masa. Como resultado de una ruptura espontánea de la simetría dos campos escalares con masa (ϕ y ϕ^*) se han convertido en un campo con masa y otro sin ella. La Figura 1 muestra que, para $m^2 > 0$ pequeño, mover el vacío desde el origen hasta el punto $|\phi| = a$ cuesta energía, que se convierte en la masa del campo ρ para $m^2 < 0$. Mover θ alrededor del círculo de degeneración del vació no cuesta energía, por lo que este campo permanece sin masa. La partícula θ se denomina bosón de Goldstone. El teorema de Goldstone dice que toda ruptura de simetría de un teoría cuántica de campos global genera una partícula de espín cero sin masa [1].

11 Bosón de Higgs

El mecanismo de Higgs consiste en aplicar una ruptura de simetría a un campo con simetría de aforo local [1, 2, 3]. Consideremos el campo escalar ϕ^4 complejo acoplado a un campo electromagnético, presentado en la sección 8. Tomando, con $m^2 < 0$, el campo en forma exponencial (10.2) alrededor del estado de mínima energía (10.1), obtenemos fácilmente como nueva Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &+ e^2a^2A_\mu A^\mu + (\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) \\ &- \mathrm{i}ea(A^\mu\partial_\mu\rho - A_\mu\partial^\mu\rho) - m^2a^2 \\ &- 2m^2a\rho - m^2\rho^2 - \lambda a^4 - 4\lambda a^3\rho \\ &- 6\lambda a^2\rho^2 + \text{términos de mayor orden}, \end{aligned}$$

con lo que el campo vectorial A_μ, que representa al fotón, ha adquirido masa ($m_A = ea$) "comiéndose" al bosón escalar θ, el bosón de Goldstone, que no tiene existencia física gracias a la simetría $U(1)$ local, mientras que el bosón escalar ρ, bosón de Higgs, sigue siendo masivo. A partir de dos bosones escalares con masa y un bosón vectorial sin masa hemos obtenido, gracias a la ruptura espontánea de la simetría, un bosón vectorial y un bosón escalar ambos con masa.

En la parte II de este artículo abordaremos el mecanismo de Higgs en teorías de aforo no abelianas con grupos de simetría $O(3)$ y $SU(2)$, lo que nos anticipará su aplicacióin a la teoría electrodébil.

12 Bibliografía

1. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory (2nd. ed.)*, Cambridge University Press (1996).
2. A.A. Sokolov et al., *Electrodinámica Cuántica*, Editorial Mir, Moscú (1989).
3. N. Nélipa, *Physique des Particules Élémentaires*, Editorial Mir, Moscú (1981).
4. M. Postnikov, *Leçons de Géométrie. Géométrie Analytique*, Editorial Mir, Moscú (1981).
5. W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Oxford (1958).
6. F.J. Yndurain, *Mecánica Cuántica Relativista*, Alianza Universidad Textos, Madrid (1990).